Условия задач

1. Приведите пример трех квадратных трехчленов таких, что каждый из них имеет два различных вещественных корня, а сумма любых двух трехчленов не имеет корней.

2. По кругу сидят 2015 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Каждый человек сказал: «Про меня и моих соседей ничего сказать не могу, а вот все остальные — точно лжецы». Сколько рыцарей может быть за этим столом?

3. Дана геометрическая прогрессия. Известно, что ее первый, десятый и тридцатый члены являются натуральными числами. Верно ли, что ее двадцатый член также является натуральным числом?

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_A, BH_B, CH_C. Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения высот треугольников AH_BH_C, BH_AH_C, CH_AH_B равен треугольнику $H_AH_BH_C$.

5. Уравнение $x^2 - 2x + a = 0$ имеет два различных вещественных корня. Докажите, что сумма кубов этих корней больше 2.

6. Лена возвела натуральное число N в квадрат и в куб и сложила количество цифр в числе N^2 с количеством цифр в числе N^3. Могло ли у нее в сумме получится 2016 цифр?

7. Про натуральное число n известно, что НОД$(1000, n) = 4$ и НОД$(1000, n+1) = 5$. Чему равен НОД$(1000, n+2)$?

8. Из одной точки круговой дорожки стартовали одновременно в одном направлении Лена пешком и малыш Дима на велосипеде. Скорость Димы на 65% больше скорости Лены, и поэтому время от времени Дима обгоняет Лену. В скольких разных точках дорожки будут происходить обгоны?

9. Дан куб и плоскость, не имеющая с ним общих точек. Докажите, что восемь расстояний от его вершин до этой плоскости можно разбить на две группы так, что суммы чисел в каждой группе будут равными и суммы квадратов чисел в каждой группе тоже будут равными.

10. Пусть A — сумма восьмых степеней всех чисел от 1 до $10^9 - 1$, а B — сумма восьмых степеней тех из этих чисел, у которых сумма цифр четна. Докажите, что $A = 2B$.